Appunti sulla successione di Fibonacci e la sezione aurea di un segmento

a cura delle Prof.sse Calabrese Addolorata e De Robertis Annamaria

LEONARDO FIBONACCI

Leonardo Pisano, detto Fibonaccio (figlio di Bonacci, oggi Fibonacci), figlio di Guglielmo Bonacci, nacque a Pisa intorno al 1170. Suo padre era segretario della Repubblica di Pisa e responsabile a partire dal 1192 del commercio pisano presso la colonia di Bugia, in Algeria. Alcuni anni dopo il 1192, Bonacci portò suo figlio con lui a Bugia. Il padre voleva che Leonardo divenisse un mercante e così provvedette alla sua istruzione nelle tecniche del calcolo, specialmente quelle che riguardavano le cifre indo-arabiche, che non erano ancora state introdotte in Europa. In seguito Bonacci si assicurò l'aiuto di suo figlio per portare avanti il commercio della repubblica pisana e lo mandò in viaggio in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza. Leonardo colse l'opportunità offertagli dai suoi viaggi all'estero per studiare e imparare le tecniche matematiche impiegate in queste regioni. Intorno al 1200, Fibonacci tornò a Pisa dove per i seguenti 25 anni lavorò alle sue personali composizioni matematiche. In tutta la sua produzione l'opera più importante è il "*Liber abaci*", comparso attorno al 1228: è un lavoro contenente quasi tutte le conoscenze aritmetiche e algebriche ed ha avuto una funzione fondamentale nello sviluppo della matematica dell'Europa occidentale. In particolare la numerazione indo-arabica, che prese il posto di quella latina semplificando notevolmente i commerci extraeuropei, fu conosciuta in Europa tramite questo libro. In tale sistema di numerazione, il valore delle cifre dipende dal posto che occupano: pertanto egli fu costretto ad introdurre un nuovo simbolo, corrispondente allo zero "0", per indicare le posizioni vacanti. Leonardo Pisano fu senza dubbio il matematico più originale e più abile del mondo cristiano medioevale, ma gran parete della sua opera era di livello troppo elevato perché potesse essere capita dai suoi contemporanei. La reputazione di Leonardo come matematico divenne così grande che nel 1225 l'imperatore Federico II si fermò a Pisa per presiedere una specie di torneo matematico nel quale il talento di Leonardo doveva essere messo alla prova.

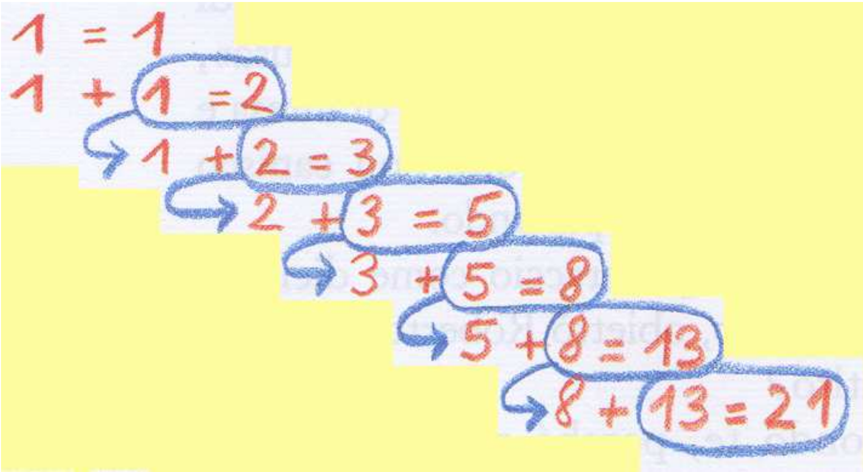
E' questo il primo esempio storico di queste sfide che divennero poi tanto comuni nel XVI e XVII secolo.
Alcuni dei problemi trattati in quell'occasione furono inseriti poi nella sua opera *Liber quadratorum*.
Dopo il 1228 non si sa in sostanza più niente della vita di Leonardo tranne il decreto della Repubblica di Pisa che gli conferì il titolo di "*Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo"* a riconoscimento dei grandi progressi che apportò alla matematica.
Fibonacci morì qualche tempo dopo il 1240, presumibilmente a Pisa. Anche al giorno d'oggi la fama di Leonardo è tale che esiste un'intera pubblicazione dedicata a questi argomenti: il "Fibonacci Quarterly", periodico matematico dedicato interamente all'aritmetica connessa alla sequenza di Fibonacci.

LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI

Problema:

Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno, a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia dà alla luce una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese?

Fibonacci nel Liber abaci



1 1 2 3 5 8 13 21 34 …

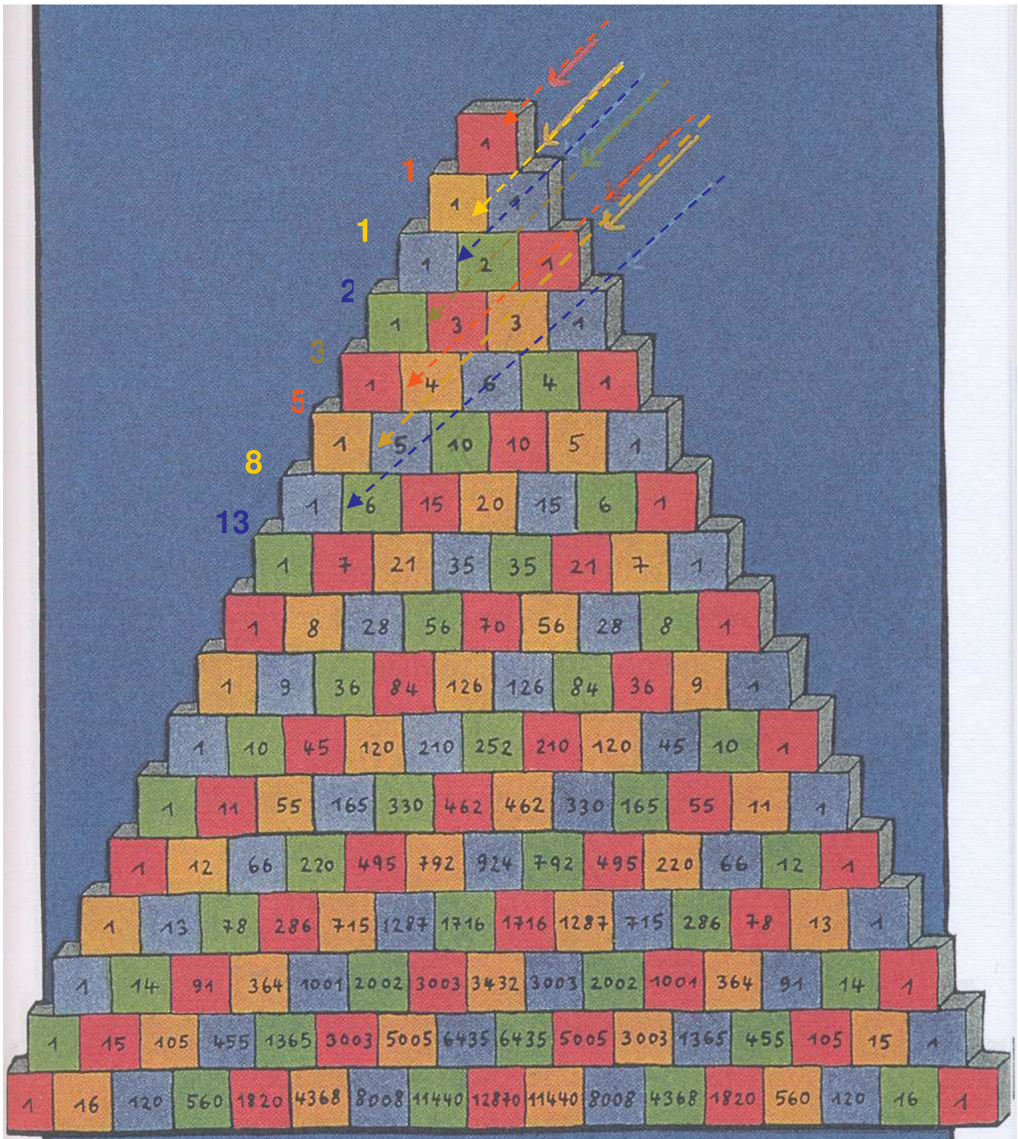
In generale:

$u_1 = 1$ $u_2 = 1$ $u_3 = 2$ … $u_n = u_{n-2}+u_{n-1}$…

Ma potrebbe anche essere per esempio:
$u_1 = 2$ e $u_2 = 2$
In tal caso come continuerebbe la successione?
2 2 4 6 10 16 26 42 68 …

E' una successione ricorsiva per cui per determinare l'n-esimo termine è necessario conoscere quelli che lo precedono.

IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA



Alcune proprietà della successione di Fibonacci:

1. Due termini consecutivi qualunque sono primi tra loro.
2. Se si sommano due o più numeri consecutivi, sempre a partire dal primo, e si aggiunge ulteriormente "1", si ottiene sempre un altro numero di Fibonacci che nella sequenza segue di due posti l'ultimo termine della somma.

1+1+2+3+5+1 = 13
1+1+2+3+5+8+13+21+34 +1 = 89

3. Sommando alternativamente gli elementi della successione (uno sì ed uno no a partire dal primo) si ottiene sempre l' elemento successivo all' ultimo sommato.

1 1 2 3 5 8 13 21 34 …
1 + 2 + 5 =8

4. Se si prendono due numeri di Fibonacci consecutivi e se ne fa il quadrato, la somma fra i quadrati è un altro numero di Fibonacci che nella sequenza occupa il posto risultante dalla somma delle posizioni dei due termini di partenza.

1 1 2 3 5 8 13 21 34 …

4 5 =9

$\mathbf{3^2 + 5^2 = 34}$

5. Ogni due numeri ve n'è uno divisibile per **due**, ogni tre numeri ve n'è uno divisibile per **tre**, ogni quattro numeri ve n'è uno divisibile per **cinque**, … ogni n numeri vi è o un numero primo o un numero divisibile per lo stesso numero primo.

6. Il massimo comun divisore fra due numeri di Fibonacci è ancora un numero di Fibonacci la cui posizione è data dal MCD fra i loro indici.

1 1 2 3 5 8 13 21 34 …
1 = MCD(7,9)

7

9

MCD(13,34) = 1

7. All'aumentare di n il rapporto tra ogni termine ed il termine che lo precede tende ad avvicinarsi a:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618033988...$$

noto come il **numero d'oro o rapporto aureo**.

8. All'aumentare di n il rapporto tra ogni termine ed il termine che lo segue tende ad avvicinarsi sempre di più a:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0{,}618033989...$$

Grazie a questi due numeri De Moivre (1667-1754) trovò una **formula per determinare l'n-esimo termine della successione di Fibonacci:**

$$u_n = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Un'altra proprietà che rende φ un *numero magico*:
φ è una frazione continua cioè

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = ...$$

è un numero che si **autoriproduce**

APPLICAZIONI:

IN ECONOMIA:
I NUMERI DI FIBONACCI E LA BORSA DI MILANO
Un'applicazione moderna dei numeri di Fibonacci si può riscontrare presso la borsa azionistica di Milano. Prendendo spunto da Leonardo Fibonacci da Pisa, uno dei più grandi protagonisti della storia della matematica, Ralph Elson Elliot elaborò una precisa teoria di previsione dei mercati finanziari con la quale in tempi recenti sono stati anticipati i più grandi rialzi e i più grandi crolli di borsa. Usando le onde di Elliot ed i numeri di Fibonacci, il docente universitario G. Migliorino ha previsto con incredibile precisione il punto minimo del drammatico ribasso dell'estate '98.

IN INFORMATICA:
I NUMERI DI FIBONACCI NEL PROCESSORE PENTIUM
I numeri di Fibonacci sono utilizzati anche nel sistema informatico di molti computer. In particolare vi è un complesso meccanismo basato su tali numeri, detto "Fibonacci heap" che viene utilizzato nel processore Pentium della Intel per la risoluzione degli algoritmi.

IL NUMERO D'ORO E LA SCUOLA PITAGORICA

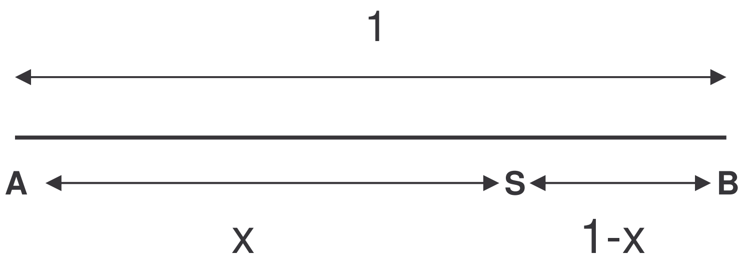
" Dividere un segmento in modo che il rettangolo che ha per lati l' intero segmento e la parte minore sia equivalente al quadrato che ha per lato la parte maggiore"

Proposizione 11 del libro II degli *Elementi di Euclide*

Assegnato il segmento AB lo si vuole dividere tramite il punto S in due parti tali che la maggiore sia medio proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente:

AB : AS = AS : SB

Una soluzione algebrica a questo problema fu data da Luca Pacioli:

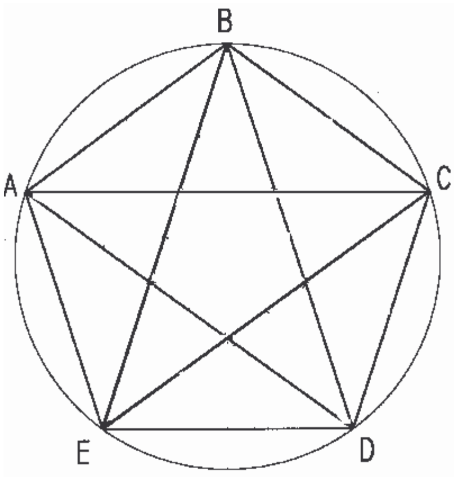


1 : x = x : 1-x

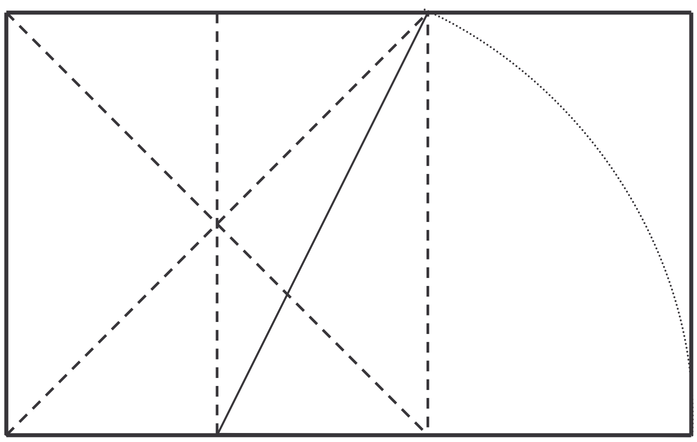
x^2 = 1-x

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

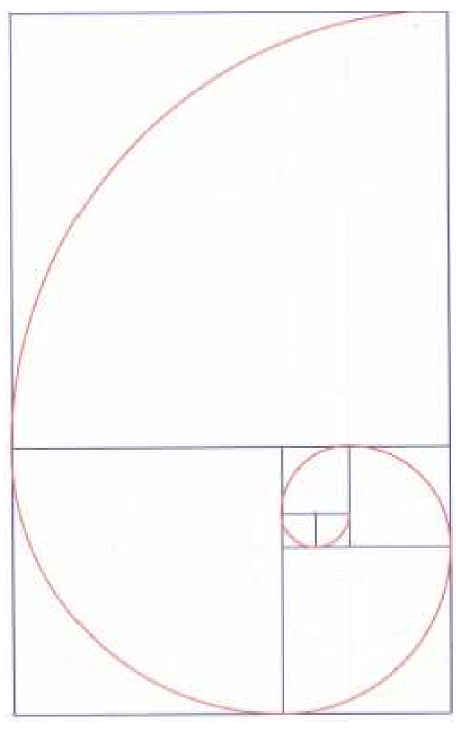
ritrovando così il numero d’oro.
La sezione aurea si autoriproduce. Inoltre dà origine a poligoni aurei quali:



Il pentagono stellato, simbolo delle scuola Pitagorica



Il rettangolo aureo, da sempre largamente utilizzato in architettura



La spirale aurea, che ritroviamo spesso in natura